Zur Theorie der Functionen mit mehreren, nicht vertauschbaren Perioden.

Von

Otto Rausenberger in Frankfurt a. M.

Bezeichnet $f(x)$ eine Modulfunction, d. h. eine eindeutige Function, welche den Gleichungen

$$f(x+1) = f(x) \quad \text{und} \quad f\left(-\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

genügt, mithin nach der von mir in der Abhandlung: „Theorie der allgemeinen Periodicität“ im XVIII. Band der Annalen gebrauchten Ausdrucksweise eine Function mit den beiden nicht vertauschbaren Perioden

$$y = x + 1 \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{x},$$

so lassen sich mit Hülfe derselben Functionen construiren, welche die Perioden (n ist eine positive, ganze Zahl)

$$y = x + \sqrt{n} \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{x},$$

oder, was durch eine einfache Transformation zu erreichen ist, die Perioden

$$y = x + 1 \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{nx}$$

besitzen. Bildet man nämlich irgend eine rationale, symmetrische Function von

$$f(x\sqrt{n}) \quad \text{und} \quad f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right),$$

z. B.

$$F(x) = f(x\sqrt{n}) + f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right),$$

so erhält man eine Function mit den ersterwähnten Perioden; denn es ist

$$F(x+\sqrt{n}) = f(x\sqrt{n}+n) + f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}+1\right)$$
$$= f(x\sqrt{n}) + f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = F(x)$$

und

$$F\left(-\frac{1}{x}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{n}}{x}\right) + f\left(-\frac{1}{x\sqrt{n}}\right) = f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) + f(x\sqrt{n}) = F(x).$$

Die durch Iterirung und Combination der Substitutionen

$$y = x + \sqrt{n} \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{x}$$

gebildete Gruppe ist nur dann eine Untergruppe der durch

$$y = x + 1 \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{x}$$

erzeugten Gruppe, wenn n eine Quadratzahl ist.

Ich gedenke dieser kurzen Notiz umfassendere Untersuchungen über Functionen mit mehreren, nicht vertauschbaren Perioden folgen zu lassen, welche die von Herrn Poincaré auf diesem Gebiete erzielten Resultate in mannigfacher Weise ergänzen werden.

Frankfurt a. M., im März 1882.